Teorema: Se il limite esiste è unico.

Teorema sulla permanenza del segno.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Acc}(A)$.

Se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

e $l \neq 0$ allora $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$

t.c. $x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x)$ ha

lo stesso segno di l.

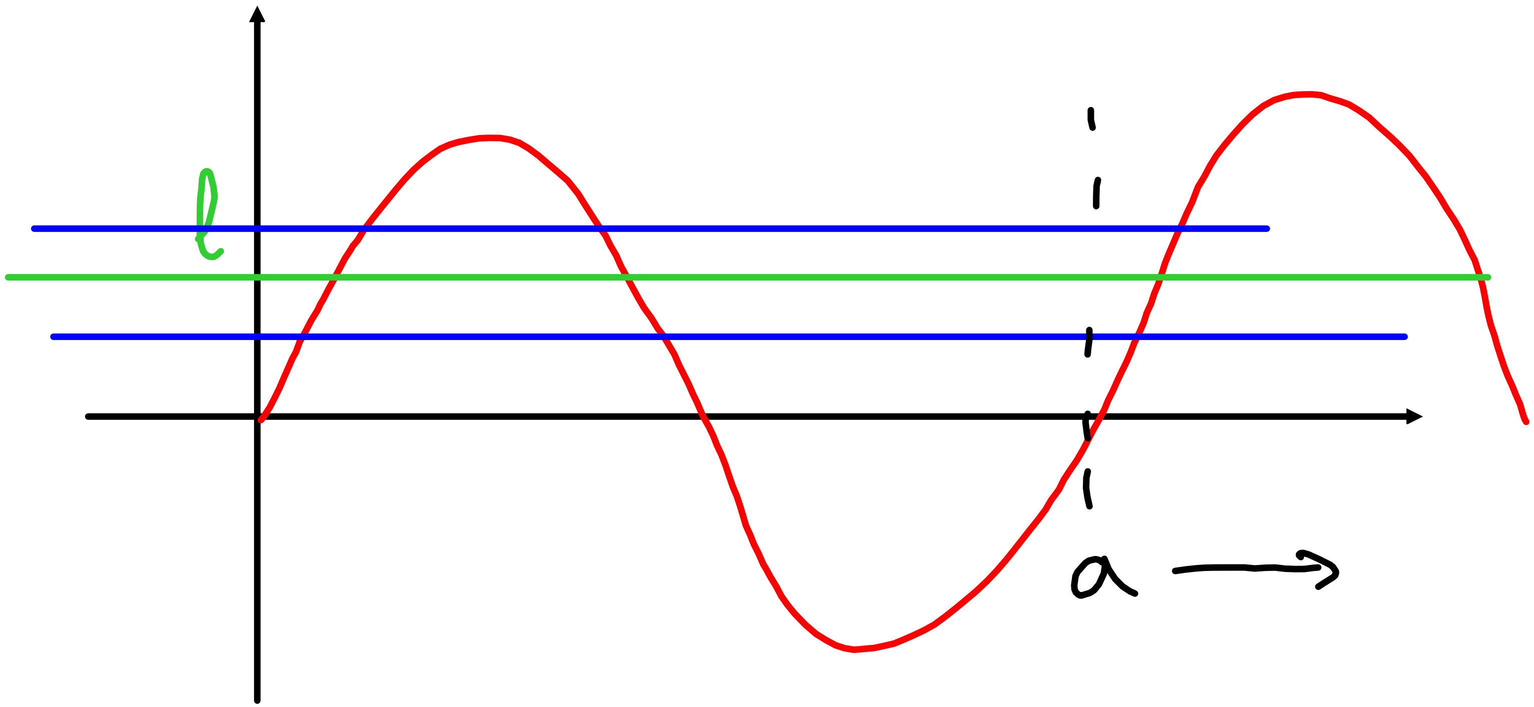
Es: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty > 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x} > 0$ in un intorno destro di 0.

Es: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$



Scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Se esistesse

$\lim_{x \to \infty} \sin x = l$ allora dovrebbe

esistere $a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x > a \implies l - \frac{1}{2} < \sin x < l + \frac{1}{2}$$

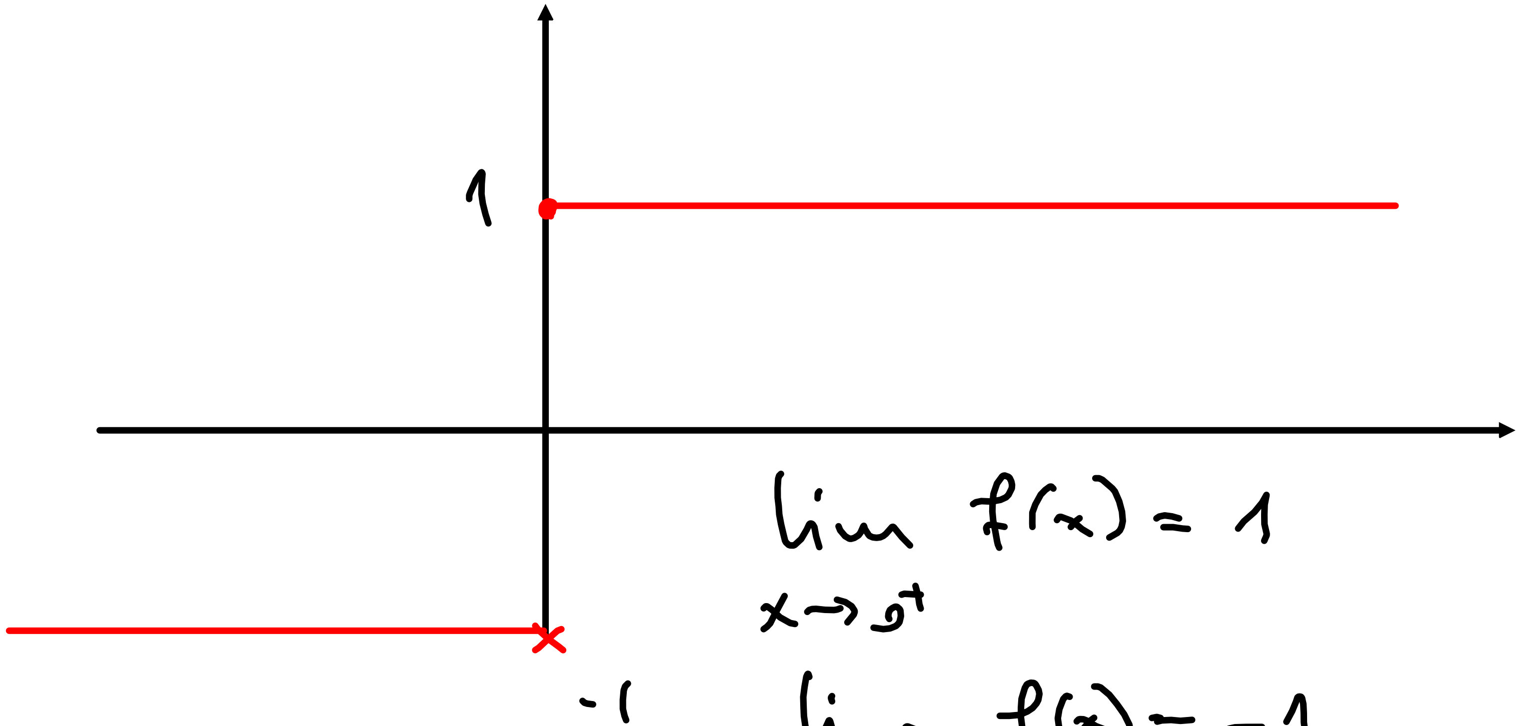
ma questo non è possibile

perché $\sin x$ assume ∞ volte

i valori 1 e -1

Es:

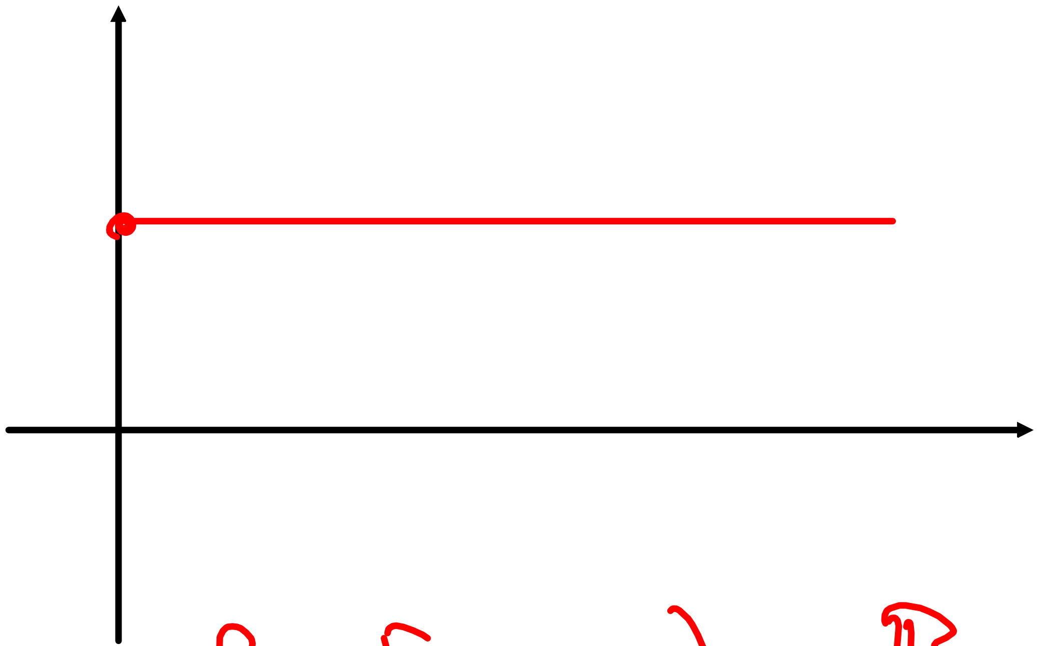
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

quindi $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

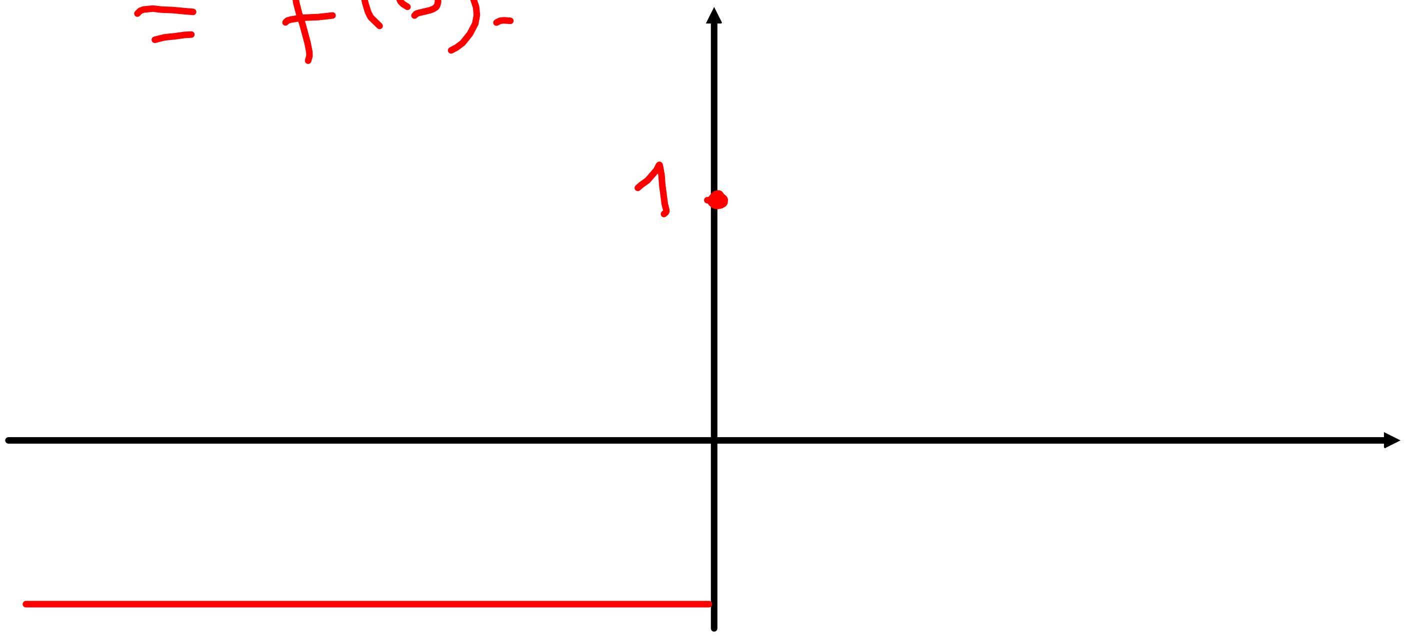


considero $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

f è continua in 0.

perché $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$= f(0).$



Considero ora $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$

f non è continua in 0 perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq$$

$$\neq f(0) = 1.$$

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

si dice che f è continua a destra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

è continua a sinistra se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Teorema di confronto.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in Acc(A)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$.

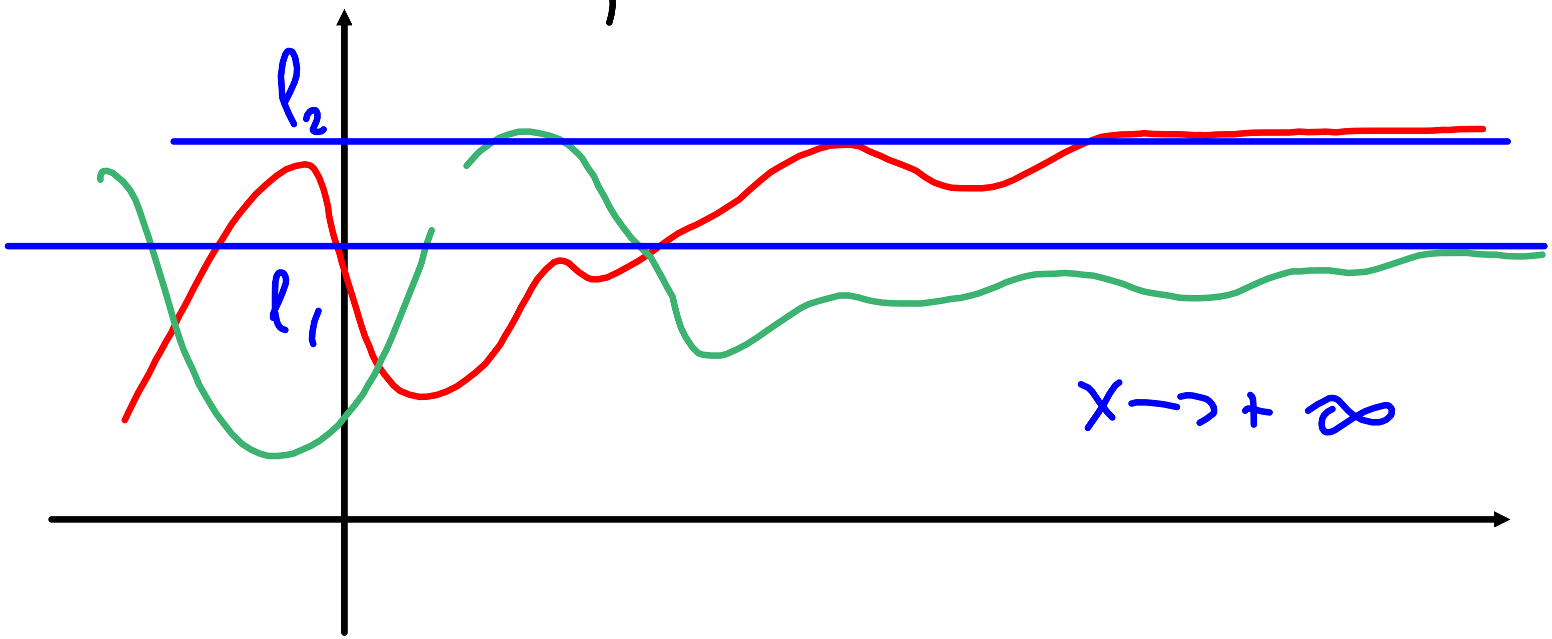
Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad , \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

e se $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$$x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

Allora $\quad l_1 \leq l_2$.



Detto in altri termini la disuguaglianza passa al limite.

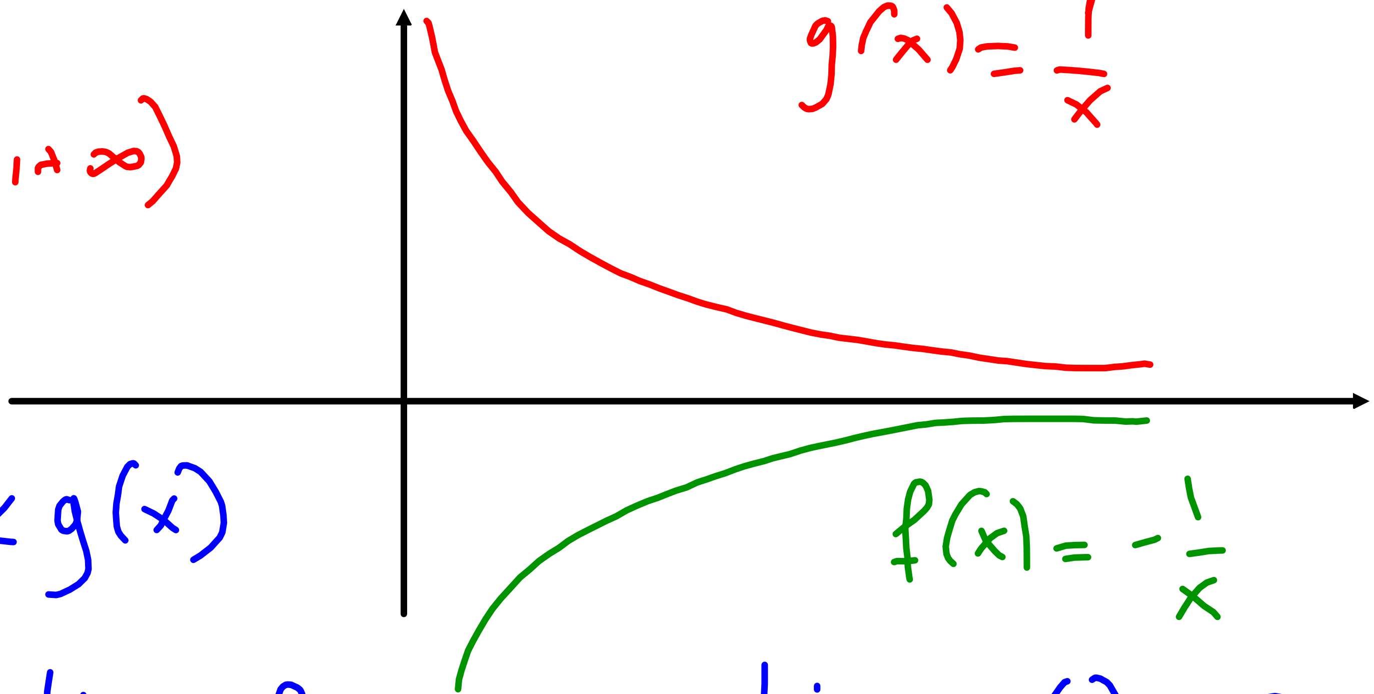
$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

E se fosse $f(x) < g(x)$?

$A = (0, +\infty)$

$g(x) = \frac{1}{x}$



$f(x) < g(x)$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \,, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

Le disuguaglianze strette potrebbero diventare deboli passando al limite. Cioè

$$f(x) < g(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Teorema dei Carabinieri.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

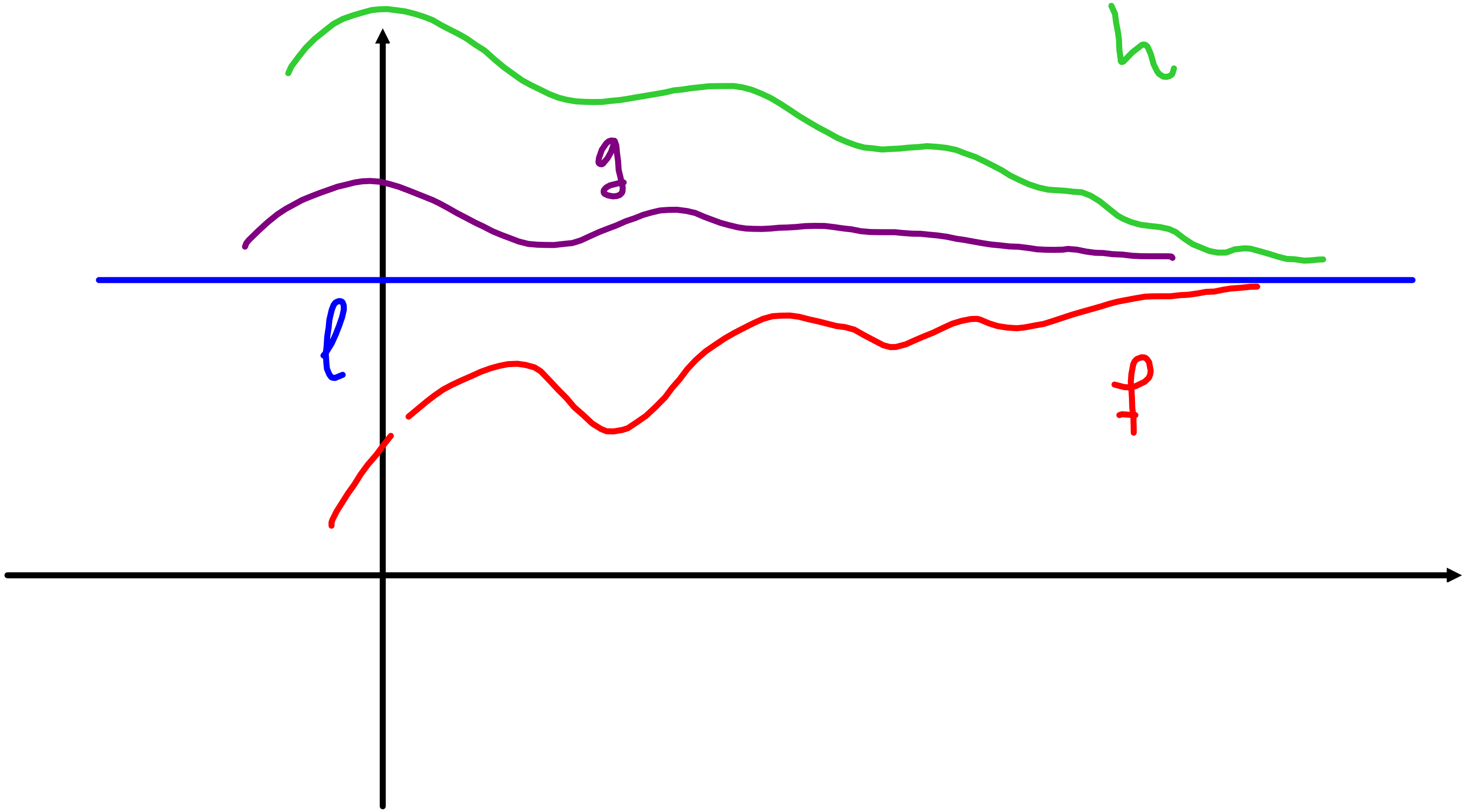
$f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

e se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$



h
g
ℓ
f

Es:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x}$$

$x>0$

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{f} = \frac{2-1}{x} \leq \underbrace{\frac{2+\sin x}{x}}_{g} \leq \frac{2+1}{x} = \underbrace{\frac{3}{x}}_{h}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Teorema (somma e prodotto di limiti).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo

che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) se ha senso $\ell_1 + \ell_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

2) se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 .$$

Vuol dire che non vale nei casi
di indeterminazione

$(+\infty)+(-\infty)$

$(-\infty)+(+\infty)$

$(+\infty)\cdot 0$

$(-\infty)\cdot 0$

cioè il teorema non ci dice
niente.

Esempi di indeterminazione.

1) $f(x) = 2x \qquad g(x) = -x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) = \,?$

$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} 2x - x = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$

2) $f(x) = \frac{x}{2}$ $g(x) = -x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) = ?$

$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2} - x =$

$= \lim_{x \to \infty} -\frac{x}{2} = -\infty$

Es: $0 \cdot \infty$?

$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

Es: $0 \cdot \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $g(x) = x^2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$

ma in questo caso

$f \cdot g = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x \longrightarrow +\infty$

Prop: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

e $\ell \in \mathbb{R}$ (cioè è finito)

allora f è limitata in un

intorno di x_0 cioè

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ e $\exists\, M > 0$ t.c.

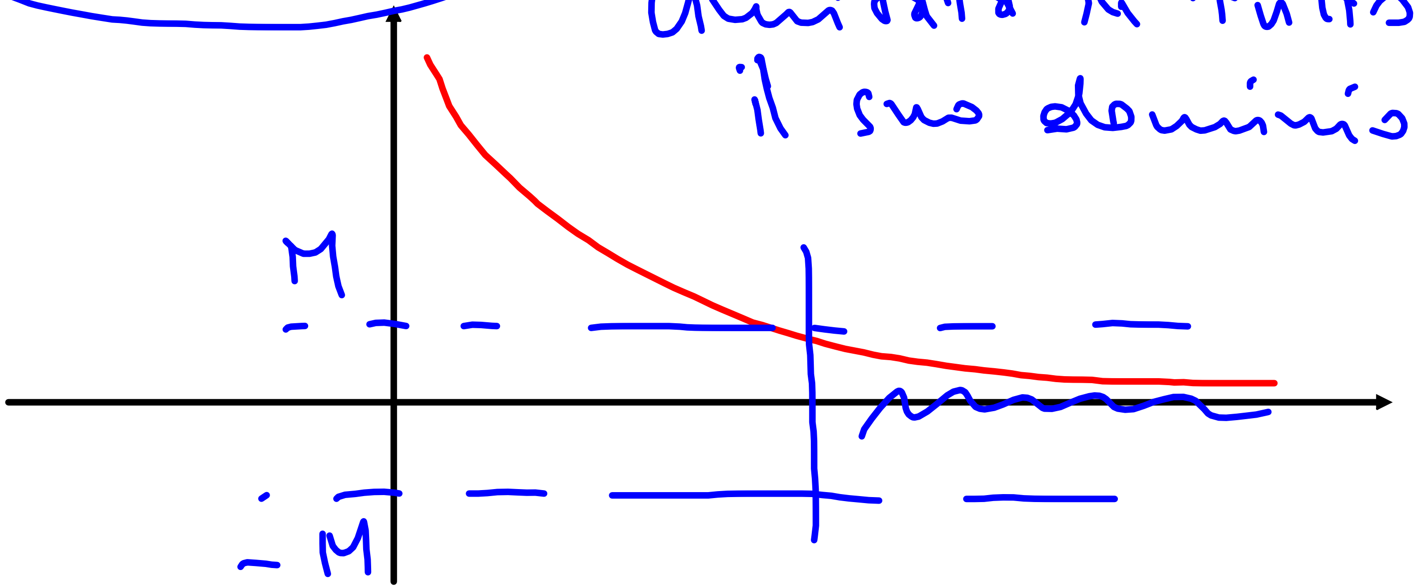
$x \in U \cap \operatorname{dom}(f) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \quad |f(x)| < M$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

è limitata in un intorno di $+\infty$.

f non è limitata in tutto il suo dominio



Oss: Se f è limitata inferiormente e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$$

Es : $f(x) = \sin x$

$g(x) = x$

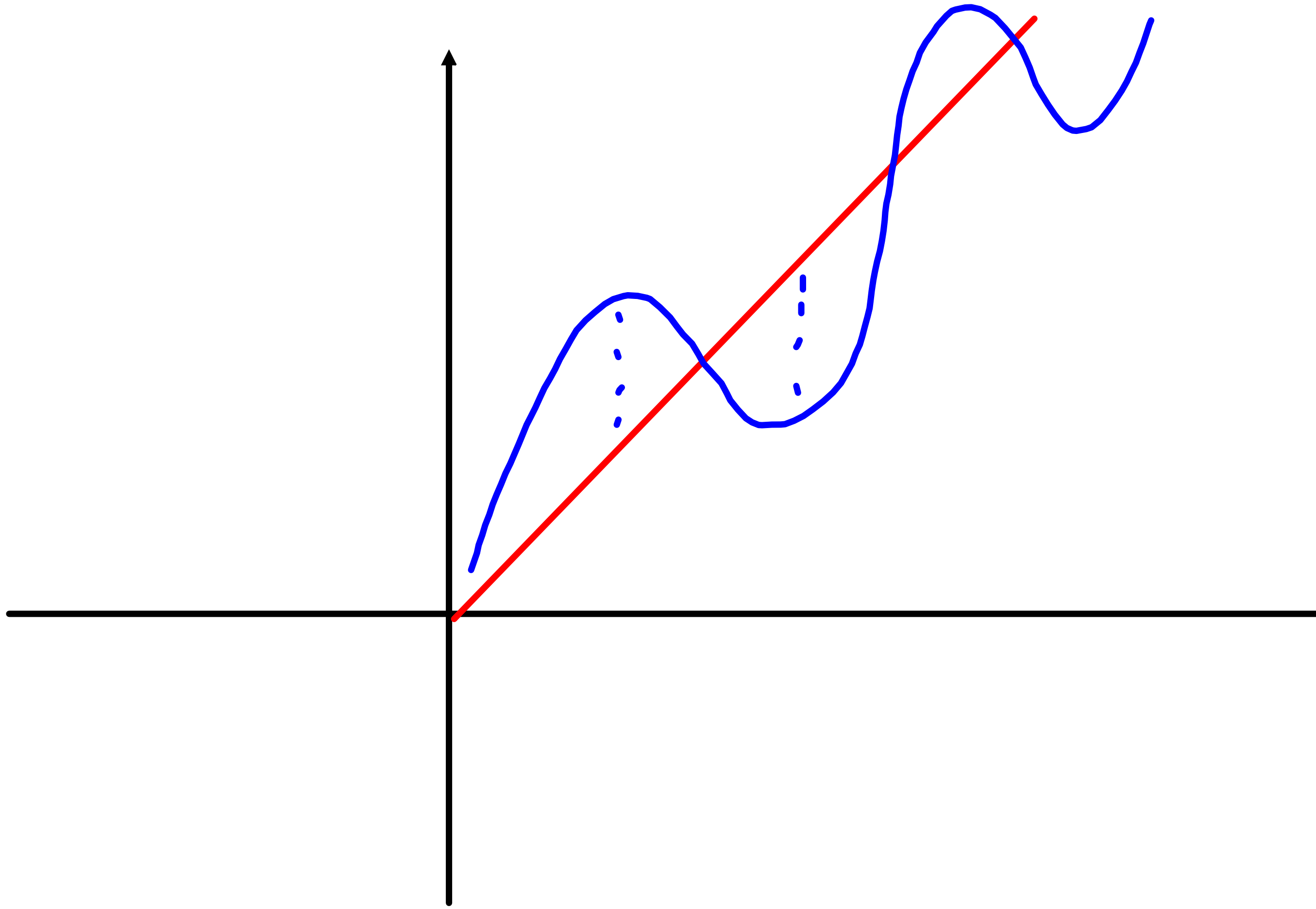
$\nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$

ma $\sin x \geq -1$ quindi

f è limitata inferiormente

$\lim_{x \to \infty} x = +\infty$

$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} x + \sin x = +\infty$



Oss: Se f è limitata superiormente e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$$

Oss: Se f è limitata

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

allora $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

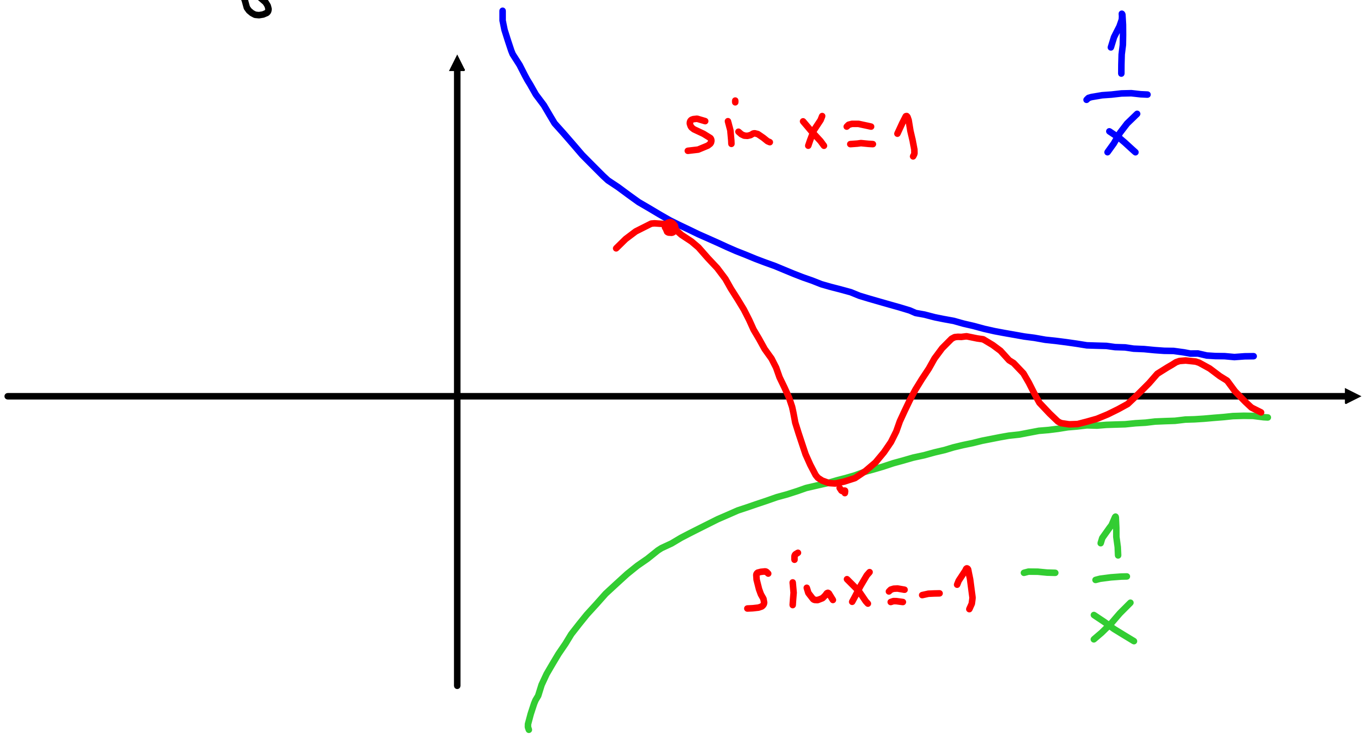
$f(x) = \sin x$ $\quad |\sin x| \leq 1$

$\Rightarrow$ f è limitata

$g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{x} & \le & \frac{\sin x}{x} & \le & \frac{1}{x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$



Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

f si dice infinitesima per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dice che f diverge positivam. per $x \to x_0$

dir. negat. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Prop: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \neq 0, \pm\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Limiti fondamentali.

Polinomi.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinomio di grado n $(a_n \neq 0)$.

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} 3x^2 - 5x = +\infty - \infty$$

$$3x^2 - 5x = x^2\left(3 - \frac{5}{x}\right)$$

$$\infty \qquad 3 - 0$$

$$\infty\left(3 - \frac{5}{+\infty}\right) = \infty\left(3 - 0^+\right) = \infty \cdot 3$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \operatorname{sgn}(a_n)\,\infty$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= \underset{+\infty}{x^n} \underbrace{\left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a}{x^n} \right)}_{\to a_n + 0 + 0 + \dots + 0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_n)\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \operatorname{sgn}(a_n)(-\infty) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Es.

$$\lim_{x \to -\infty} -5x^3 + 7x^2 = +\infty$$

$$-5(-\infty) = +\infty$$

i polinomi si comportano a $\pm\infty$ come il loro monomio di grado più alto.

Funzioni razionali

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{grado } n \\ \leftarrow \text{grado } m \end{array}$$

$$p(x) = a_n x^n + \cdots$$

$$q(x) = b_m x^m + \cdots$$

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} =$$

$$= \frac{x^n \left(a_n + \underbrace{a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \dots}_{\to 0}\right)}{x^m \left(b_m + \underbrace{b_{m-1} \cdot \frac{1}{x} + \dots}_{\to 0}\right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{a_n x^n}{b_m x^m}} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)(+\infty) & \text{se } n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n<m \end{cases}$$

$$0^+ \quad \text{se} \quad \frac{a_n}{b_m} > 0$$

$$0^- \quad \text{se} \quad \frac{a_n}{b_m} < 0$$

Limite a $-\infty$

<u>Es</u>: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5+5x^2}{-3x^3+2x+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5}{-3x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{7}{3}x^2$$

$$= -\frac{7}{3}(+\infty) = -\infty.$$